Volumen

3

ÓRBITAS EN EL SISTEMA SOLAR

Leyes de Kepler, Cónicas, Movimiento orbital

Taller de Astronomía

Autora: Profa. Ana Inés Gómez de Castro

INTRODUCCIÓN A LA ASTRONOMÍA

Taller de Astronomía

© Ana Inés Gómez de Castro
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
email:aig@mat.ucm.es

Tabla de contenido

Capítulo 1

Leyes de Kepler

Johann Kepler (1571-1630) fue contemporáneo de Galileo. Desde muy joven había aceptado la doctrina copernicana y estaba plenamente convencido de la existencia de relaciones matemáticas por descubrir, que podrían dar sentido al sistema planetario. Kepler observó que los planetas más distantes del Sol se movían más lentamente que los interiores y propuso que los planetas eran mantenidos en movimiento por la acción de una fuerza ejercida desde el Sol, de manera que la fuerza decrecía al alejarse de él. Esta idea fue sorprendentemente original; no hubo con anterioridad a Kepler ningún reconocimiento claro de los movimientos del cielo en términos de una fuerza física actuando de manera continua desde el Sol.

En 1596 Kepler podía hacer poco más que adelantar estas ideas como posibilidades. Para comprobarlas debía estudiar en detalle los mejores datos de planetas disponibles en aquel momento y es así como se puso en contacto con Tycho Brahe. Kepler estuvo trabajando durante dos años como ayudante de investigación de Tycho. El problema que Tycho le proporcionó acabaría siendo fundamental en su carrera. De todos los planetas, la órbita de Marte era la más difícil de ajustar con los modelos disponibles. La originalidad de Kepler estuvo en intentar resolver el problema ajustando la órbita con una figura geométrica sencilla en vez de entrar en el juego de las excéntricas. En 1609, al cabo de 8 años de trabajo, Kepler publicaría estos resultados en su libro "Nueva Astronomía".

En primer lugar, Kepler estudió como variaba la velocidad del planeta en la órbita para llegar a conocer la fuerza que producía el cambio de velocidad y posteriormente intentó determinar la forma de la órbita (que esperaba que fuera circular). Después de varios intentos fallidos se vio obligado a tratar con otras formas geométricas puesto que la órbita parecía estar comprimida en una dirección. Al final encontró que tenía forma elíptica con el Sol en uno de sus focos (1ª Ley de Kepler).

Por otro lado, de acuerdo con la teoría dinámica de Aristóteles el cambio de velocidad de los planetas debía ser debido a un cambio de la fuerza. En consecuencia, era plausible que la fuerza que provenía del Sol variara de forma inversa con la distancia de manera que el planeta barriera áreas iguales en tiempos iguales.

La 1ª y 2ª Ley de Kepler aparecerían publicadas en el mismo libro: "Nueva Astronomía". La 3ª ley aparece prácticamente escondida en algunos trabajos posteriores en los que utilizó una notación musical para describir los movimientos de los planetas, reviviendo las creencias Pitagóricas de la "armonía de las esferas".

Las leyes de Kepler resumen de manera sencilla las características fundamentales de la cinemática del movimiento planetario y como tales, se pueden usar (y se usan) para derivar las posiciones de los planetas. Se corresponden también con la solución exacta del *problema de 2-cuerpos*.

El problema de los dos cuerpos

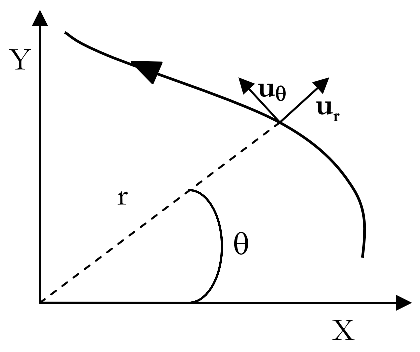
El cálculo de la trayectoria que siguen dos cuerpos sometidos a su interacción gravitatoria es lo que se denomina como el *problema de 2-cuerpos*. En la formulación moderna este problema se resume en resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{g} = -\frac{G(M+m)}{r^3}\vec{r} \qquad [1]$$

dónde "*r*" representa la distancia entre las dos cuerpos interactuantes ($\vec{r} = \vec{r}_M - \vec{r}_m$) con masas "*m*" y "*M*" y "*G*" es la constante de gravitación universal. Las trayectorias de cada masa con respecto al centro de masas instantáneo vienen dadas por:

$$\vec{r}_m = -\frac{M}{M+m}\vec{r} \qquad \vec{r}_M = \frac{m}{M+m}\vec{r}$$

la ecuación se resuelve escribiendo el vector $\vec{r}$ y sus derivadas en una base móvil tal que θ es el ángulo que hace en cualquier instante $\vec{r}$ con el eje X.



En este sistema la ecuación [1] se transforma en:

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta = -G\frac{(M+m)}{r^2}\vec{u}_r$$

y esta a su vez en:

$$\boxed{\begin{aligned} &\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -G\frac{(M+m)}{r^2} \\ &2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \end{aligned}}$$

La segunda ecuación es la expresión matemática del principio de conservación del momento angular (o de la 2ª Ley de Kepler). La integración requiere el conocimiento de una constante conservada, el momento angular por unidad de masa, que habitualmente se denota con el símbolo ***h***. La solución de la primera ecuación es una cónica:

$$\frac{1}{r} = A\cos(\theta - \theta_0) + \frac{G(M+m)}{h^2} \qquad [2]$$

dónde **A** y $\boldsymbol{\theta_0}$ son las constantes de integración. La ecuación [2] corresponde a una cónica cuya excentricidad (**e**) y semieje mayor (**a**) vienen dados por:

$$e = \frac{A}{G(M+m)/h^2} = \sqrt{\frac{2\varepsilon h^2}{[G(M+m)]^2} + 1}$$

$$a = \frac{G(M+m)}{2\varepsilon}$$

ε representa la energía conservada por unidad de masa, es decir,

$$\varepsilon = \frac{\dot{\vec{r}}^{\,2}}{2} - G\frac{M+m}{r}$$

Por tanto, las dos constantes de integración están relacionadas con las dos magnitudes físicas conservadas (el momento angular y la energía). La energía controla el tamaño de la órbita mientras que la excentricidad es controlada por una combinación de ambas.

Las cónicas y las órbitas:

La relación entre la geometría de la órbita y los parámetros físicos fundamentales del problema se puede resumir en la siguiente tabla.

e=0	Orbita Circular	$\varepsilon = \varepsilon_{\min} = -\frac{[G(M+m)]^2}{2h^2}$
0<e<1	Orbita Elíptica	$\varepsilon_{\min} < \varepsilon < 0$
e=1	Orbita Parabólica	$\varepsilon = 0$
e>1	Orbita Hiperbólica	$\varepsilon > 0$

En resumen, las trayectorias están acotadas entre dos extremos: la trayectoria/órbita circular o de mínima energía y la trayectoria hiperbólica en qle que el cuerpo menos masivo no es atrapado por la gravedad del más masivo: su trayectoria original es, simplemente, deflectada por la gravedad de otro cuerpo. Tanto las órbitas parabólicas como las circulares no se pueden observar en la naturaleza puesto que implicaría una precisión infinita que no existe en nuestros métodos de medida. Las órbitas de los cuerpos del Sistema Solar (es decir, de los cuerpos atrapados por la gravedad del Sol) son elípticas. Las órbitas de los cuerpos que escapan del Sistema Solar son hiperbólicas. Las sondas espaciales pueden utilizar órbitas hiperbólicas (con planetas masivos cercanos, por ejemplo Júpiter) para minimizar el consumo de combustible en trayectorias que deben alcanzar objetos más lejanos.

TABLA RESUMEN DE CÓNICAS

Circunferencia:

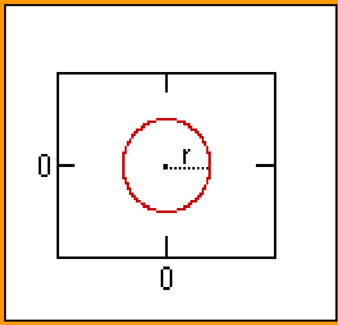
Lugar geométrico de los puntos que equidistan del origen

Ecuación y parámetros:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

r = el radio del círculo

Excentricidad: 0



Parabola:

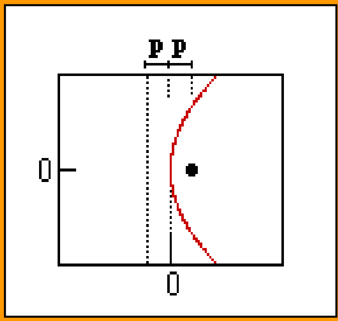
Lugar geométrico de los puntos cuya distancia al foco es igual a la distancia a la directriz

Ecuación y parámetros:

$$y^2 = 4px$$

p = la distancia desde el vértice al foco (o a la directriz)

Excentricidad: 1



Elipse:

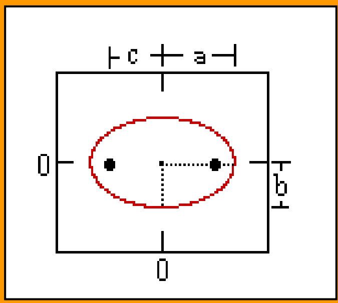
Lugar geométrico de los puntos cuya suma de la distancia a cada foco es constante

Ecuación y parámetros:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a = el radio mayor (= 1/2 la longitud del eje mayor)
b = el radio menor (= 1/2 la longitud del eje menor)
c = la distancia desde el centre al foco
$a^2 - b^2 = c^2$

Excentricidad: entre 0 y 1



Hiperbola:

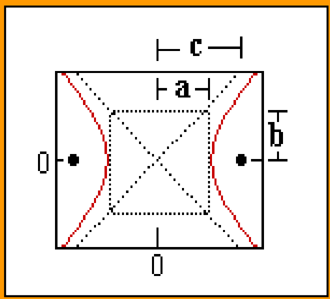
Lugar geométrico de los puntos cuya diferencia entre la distancia a cada foco es constante

Ecuación y parámetros:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a = 1/2 la longitud del eje mayor
b = 1/2 la longitud del eje menor
c = la distancia desde el centro al foco
$a^2 + b^2 = c^2$

Excentricidad: mayor que 1

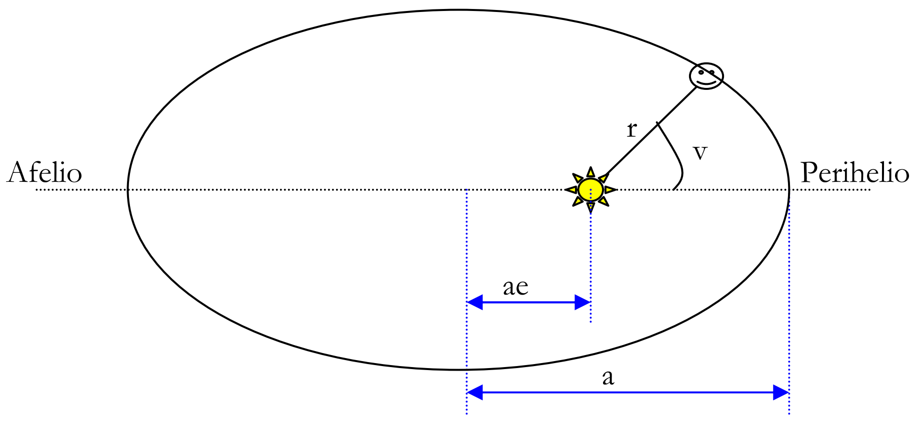


Capítulo

2

Cinemática del movimiento planetario:

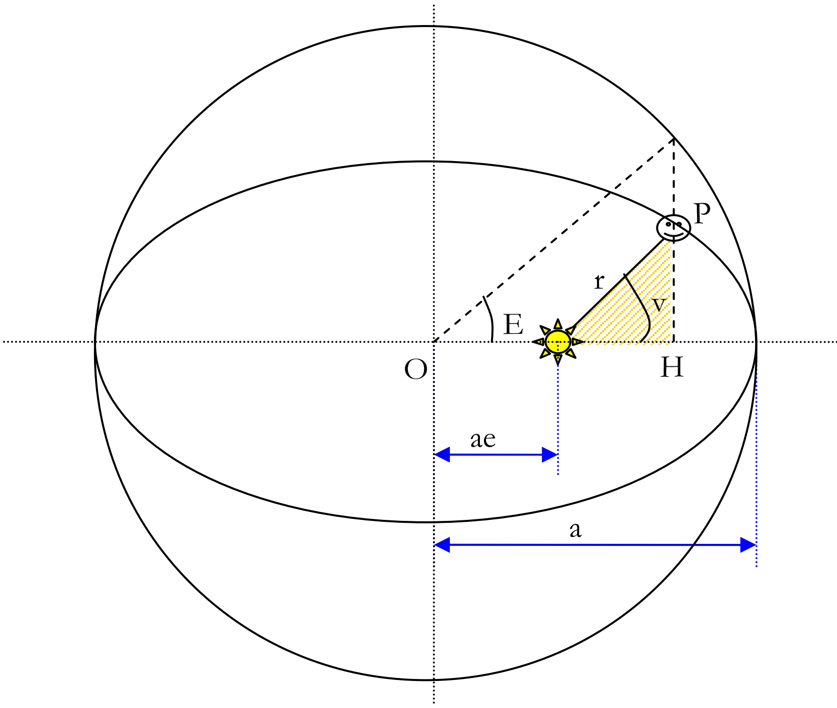
Determinar la posición de un planeta en su órbita requiere conocer la órbita, es decir, el semieje mayor de la órbita (**a**) y la excentricidad (**e**). Si además queremos saber dónde está el planeta en una fecha dada, $\boldsymbol{\tau}$**,** necesitaremos una condición inicial: habitualmente se toma la fecha en la que pasó por el perihelio (o posición de mayor proximidad al Sol) como fecha de referencia, $\boldsymbol{\tau_0}$ y la posición del perihelio como origen de ángulos.



Una vez definida la geometría, la cinemática del movimiento planetario viene dada por la 2ª ley de Kepler: "La velocidad areolar es constante". Puesto que las órbitas de los planetas tienen excentricidades pequeñas, en primera aproximación se podría considerar que el movimiento es circular uniforme; de esta manera se define un ángulo o *anomalía media* que vendría dado por la expresión:

$$M(\tau) = \frac{2\pi}{T}(\tau - \tau_0)$$

dónde **T** representa el periodo orbital. Este ángulo medio se puede relacionar con la excéntrica de la elipse a través de la 2ª Ley para los casos en los que la órbita no es circular. Se define la *anomalía excéntrica*, **E**, como se indica en la figura,



La 2ª Ley de Kepler establece que:

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{AreaOHP}{\tau - \tau_0}$$

o bien,

$$M = \frac{2\pi}{T}(\tau - \tau_0) = \left(\frac{2}{ab}\right) AreaOHP$$

El área OHP se substituye en función de **E** y se obtiene la ecuación básica del movimiento orbital también conocida como ***Ecuación de Kepler***:

$$\boxed{M(\tau) = E(\tau) - esenE(\tau)}$$

esta ecuación requiere la utilización de un método numérico, como el método de Newton, para su resolución (ver Apéndice).

Una vez obtenido **E** el cálculo de la *anomalía verdadera,* **v**, y la distancia Sol-Planeta en ese instantes, **r**, se obtiene de manera directa utilizando las relaciones entre **E**, **r** y **v** que se derivan de la figura:

$$r(\tau) = a\left[1 - e \cdot \cos E(\tau)\right]$$

$$\tan\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\frac{E}{2}$$

CUADRO RESUMEN DEL CAPÍTULO

1. La cinématica del movimiento orbital viene definida por la forma de la órbita y por la 2ª ley de Kepler o ley de las áreas.

2. Se definen tres ángulos (o "*anomalías*") fundamentales para describir el movimiento orbital:

   Anomalía Media: $M(\tau) = \frac{2\pi}{T}(\tau - \tau_0)$

   Anomalía Verdadera: $V(\tau)$ o ángulo que hace el radiovector del astro con la dirección del perihelio

   Anomalía Excéntrica: $E(\tau)$

3. Las relaciones entre estos tres ángulos vienen dadas por:

$$M(\tau) = E(\tau) - e\,sen E(\tau)$$

$$r(\tau) = a\left[1 - e \cdot \cos E(\tau)\right]$$

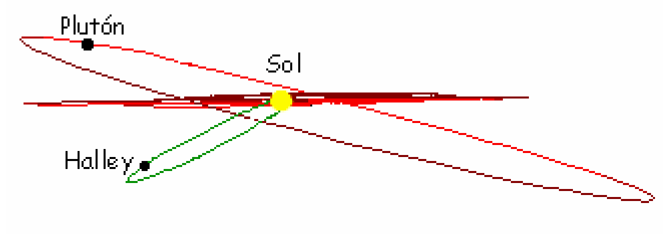
$$\tan\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}$$

Capítulo

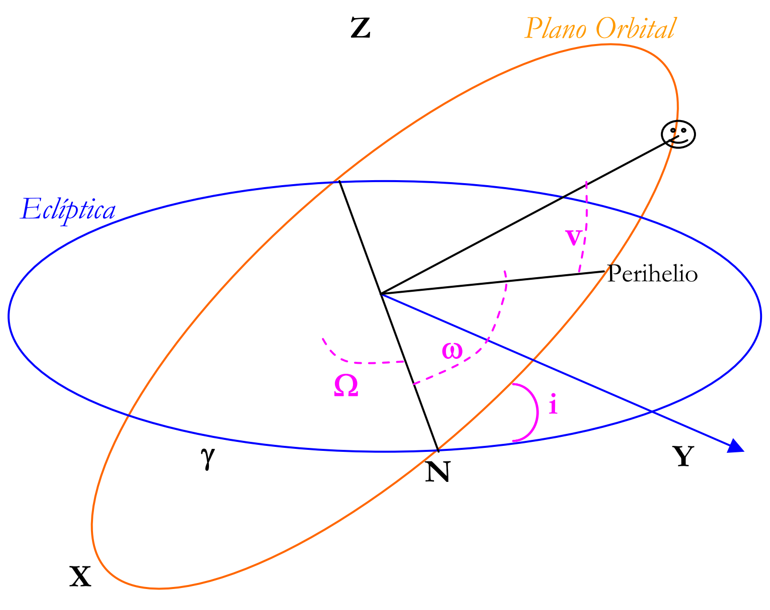
3

Los elementos orbitales:

Las órbitas de los planetas no están situadas en el mismo plano, ni poseen la misma orientación. Es necesario introducir 3 elementos geométricos que definan el plano orbital y la orientación de la órbita en el plano.



La orientación se refiere a un *Sistema de Referencia Eclíptico Heliocéntrico* tal y como se indica en la figura:



y los nuevos elementos de orientación espacial de la órbita son:

- *inclinación* de la órbita con respecto a la eclíptica, **i**
- *longitud eclíptica del nodo ascendente*, **Ω**
- *argumento del perihelio* o ángulo entre el nodo ascendente (N) y la dirección del perihelio, **ω**

En lugar del parámetro **ω,** habitualmente se suele proporcionar el parámetro:

$$\tilde{\omega} = \omega + \Omega$$

denominado *longitud del perihelio*.

En resumen, los parámetros: **i,** ω **, Ω, a, e,** τ_0 definen una única órbita recorrida por un objeto. Estos parámetros se denominan *elementos orbitales*.

Los elementos orbitales varían con el tiempo para todos los cuerpos del Sistema Solar (y también para los satélites en órbita alrededor de la Tierra). La acción gravitacional de otros cuerpos, convierte el problema de 2-cuerpos a un problema de N-cuerpos que no es integrable, y que se resuelve de manera numérica.

ELEMENTOS ORBITALES DE LOS PLANETAS DEL SISTEMA SOLAR						
Planeta	**a** (u.a.)	**e**	**Ω** (º)	**ϖ** (º)	**i** (º)	**$L(\tau) = M(\tau)+\varpi$** τ=4/Junio/2004 TU:00
Mercurio	0.3871	0.2056	48.33	77.5	7.00	23.49
Venus	0.7233	0.0068	76.68	131.7	3.39	250.28
Tierra	1.0000	0.0167	-	102.9	0.00	252.78
Marte	1.5237	0.0934	49.58	336.1	1.85	122.09
Júpiter	5.2026	0.0485	100.45	14.8	1.30	168.63
Saturno	9.5548	0.0555	113.66	94.3	2.49	104.32
Urano	19.1817	0.0473	74.00	170.3	0.77	332.22
Neptuno	30.0583	0.0086	131.78	67.7	1.77	314.50
Plutón	39.4817	0.2488	110.30	223.8	17.16	245.97

Capítulo

4

Efecto de la presión de radiación

Una nave espacial, en general, y un velero solar como el de la aplicación, en particular, experimenta una perturbación en su trayectoria "elíptica" debido a la incidencia de la radiación solar sobre la superficie iluminada. Esta radiación solar ejerce una fuerza dada por[1]:

$$\boxed{\vec{F}_{P_\Theta} = \frac{1.12 \cdot 10^{17} \cdot S}{r^2}}$$

esta fuerza de empuje va a contrarrestar la fuerza gravitatoria ejercida por el Sol y, al igual que ella, depende del cuadrado de la distancia. Siempre que las velas mantengan la misma orientación con respecto al Sol, el problema es muy sencillo y se puede integrar directamente como veremos a continuación. Partiremos de que la ecuación dinámica se modifica con respecto a [1] insertando la acción de la presión de radiación, $\vec{F}_{rad}$, de manera que:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{g} - \vec{F}_{rad}$$

y realizando los mismos cambios que en el capítulo 2 (paso a una base móvil y generación de dos ecuaciones escalares a partir de la ecuación vectorial) y sustituyendo:

$$\vec{g} = -\frac{\mu}{r^2}\vec{u}_r$$

$$\vec{F}_{rad} = \frac{\kappa}{r^2} \cdot \zeta \cdot \vec{u}_r$$

[1] Se ha considerado que la masa del velero es 100 Kg (similar a la de la misión COSMOS I) en vez de los 500 Kg utilizados en el Manual 1.

con, μ=G(M+m) y ζ=Scosφ, se obtiene:

$$\ddot{r} - r\cdot\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2} + \frac{\kappa}{r^2}\cdot\zeta = -\frac{(\mu-\kappa\cdot\zeta)}{r^2}$$

$$2\dot{r}\cdot\dot{\theta} + r\cdot\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow r^2\cdot\dot{\theta} = h = cte$$

De manera que, si hacemos el cambio de variable habitual: $r = \frac{1}{u}$:

$$\ddot{r} - r\cdot\frac{h^2}{r^4} + \frac{(\mu-\kappa\cdot\zeta)}{r^2} = \ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} + \frac{(\mu-\kappa\cdot\zeta)}{r^2} = 0$$

y,

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du}\frac{du}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{u^2}\cdot\dot{\theta}\cdot\frac{du}{d\theta} = -h\cdot\frac{du}{d\theta} \qquad [3]$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -h\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\theta}\right) = -h\frac{d^2u}{d^2\theta}\frac{d\theta}{dt} = -h\frac{d^2u}{d\theta^2}\left(\frac{h}{r^2}\right) = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

se tendrá que:

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \left(\frac{\mu-\kappa\cdot\zeta}{h^2}\right)}$$

Para el problema que se presenta en la aplicación la nave parte de una Estación Espacial co-orbitando con la Tierra alrededor del Sol, por tanto, el momento angular por unidad de masa de la nave será el mismo que el de la Tierra:

$$h = 4.5\cdot 10^{19}\, cm^2 s^{-1}$$

y, si la masa de la nave es similar al del prototipo COSMOS-I (100 kg) entonces:

$$\kappa = 1.12\cdot 10^{17}\,\frac{dinas}{g}$$

y $\mu=1.33\cdot 10^{26}$ $g\cdot cm^3 s^{-2}$. Por tanto,

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 6.57\cdot 10^{-14} - 5.53\cdot 10^{-23}\zeta(cm^2) = \wp}$$

dónde $\wp$ es una constante para una orientación fija de superficie del velero.

Por tanto, la presión de radiación tendrá sólo un efecto significativo en la trayectoria si la superficie del velero es del orden de 10^9cm^2 o 10^5m^2. De esta estimación, se ha derivado el tamaño propuesto para el aparejo en la aplicación educativa (100,000m^2 es la superficie de un círculo de radio 178m). La solución de la ecuación es:

$$\frac{1}{r} = A\cos(\theta - \theta_0) + \wp$$

con θ_0 y A constantes de integración.

Si fijamos el origen de ángulos en el punto de mayor proximidad del velero al Sol entonces, θ_0=0 y además,

$$\frac{1}{r_{perihelio}} = A + \wp$$

Vamos a suponer que la distancia del velero al Sol en el perihelio es aproximadamente igual a la distancia media Sol-Tierra ($1.49\cdot10^{13}$cm). En ese caso el valor de la constante A dependerá de la superficie proyectada del velero ζ de la siguiente manera:

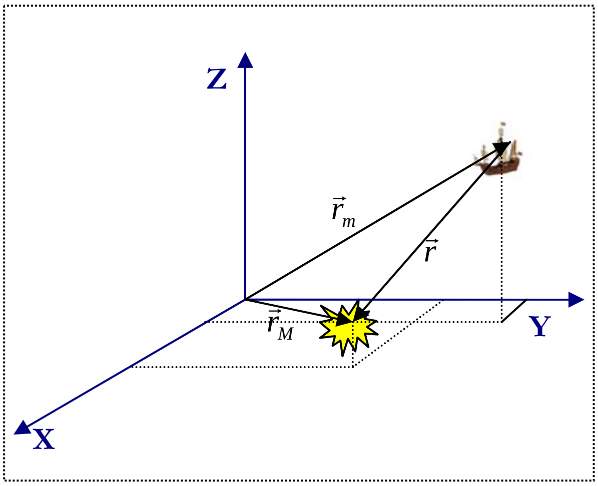
$$A = 8.33\cdot 10^{-14} - 5.53\cdot 10^{-19}\varsigma(m^2)$$

donde A viene dado en cm^{-1}.

$$r = \frac{1/\wp}{1+(A/\wp)\cdot\cos\theta}$$

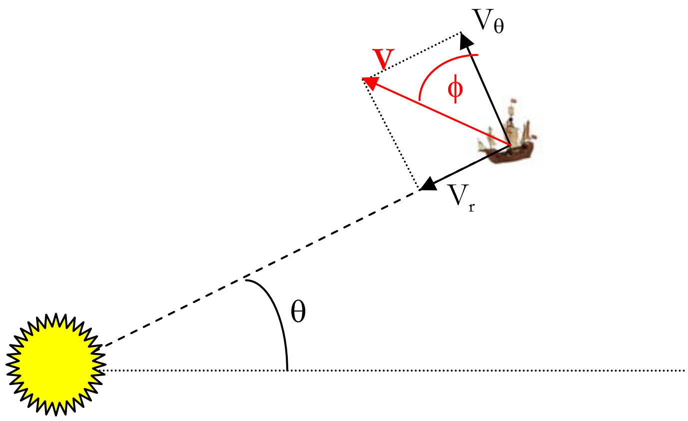
La órbita de un velero que mantuviera sus velas siempre con la misma orientación con respecto al Sol sería también una elipse aunque, para el mismo valor de ε, la excentricidad de la órbita sería mucho mayor que en el movimiento orbital puramente gravitacional.

Por último fijaros que el vector $\vec{r}$ apunta hacia el Sol, puesto que al definir nuestra base móvil de vectores elegimos $\vec{r} = \vec{r}_M - \vec{r}_m$, es decir,



Las componentes de la velocidad:

En todo instante las componentes de velocidad del velero (suponiendo ζ constante) serán:



***Velocidad azimutal*: Vθ**

Para un velero partiendo de la órbita terrestre, V_θ, viene dado de manera directa por la constante, *h*, el momento angular conservado:

$$V_\theta = r\dot{\theta} = r\frac{h}{r^2} = \frac{h}{r} = \frac{4.5\cdot 10^{19}}{r}$$

si queremos proporcionar *r* en unidades astronómicas (ver Manual 1) y obtener V_θ en km/s,

$$V_\theta = \frac{30.20 km/s}{r(u.a.)}$$

***Velocidad radial:* V_r**

La velocidad radial hay que calcularla a partir de la ecuación [3],

$$V_r = \dot{r} = h\cdot A\cdot sen\theta \qquad [4]$$

substituyendo las constantes h y A obtenemos:

$$V_r = \left[37.49 km/s - 2.48\cdot 10^{-4} km/s\cdot S(m^2)\cdot \cos\varphi\right]\cdot sen\theta$$

Fijaros que dependiendo de la superficie efectiva del aparejo del velero, la velocidad radial se va a mover entre valores muy pequeños o muy grandes. Otra manera de visualizar este efecto es sustituir en la ecuación [4], senθ por su valor en función de r,

$$sen\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{1}{A^2}\left(\frac{1}{r}-\wp\right)^2} = \frac{1}{A}\sqrt{A^2-\left(\frac{1}{r}-\wp\right)^2}$$

por tanto,

$$V_r = \frac{h\cdot A^2}{\sqrt{A^2-\left(\frac{1}{r}-\wp\right)^2}}$$

Consideraciones generales sobre la trayectoria y el valor de la constante de energía:

La constante de integración, A, viene fijada por la energía por unidad de masa en la órbita, como vimos en el capítulo 1. Por tanto, es habitual, dar V_r directamente en función de la energía por unidad de masa, **ε**. Esta energía es la suma de la energía cinética y potencial:

$$\varepsilon = \varepsilon_c + \varepsilon_p = \frac{1}{2}(V_r{}^2 + V_\theta{}^2) + \left(-\frac{\mu}{r}+\frac{\kappa\cdot\varsigma}{r}\right) = \frac{1}{2}(V_r{}^2 + V_\theta{}^2) - \frac{\wp}{r}h^2$$

y,

$$V_r = \sqrt{2\cdot\left[\varepsilon - \frac{V_\theta{}^2}{2}+\frac{\wp}{r}h^2\right]} = \sqrt{2\left[\varepsilon-\left(\frac{h^2}{2r^2}-\frac{\wp}{r}h^2\right)\right]}$$

Fijaros que V_r representa el módulo de la velocidad radial, es decir, que sólo podremos mantener en órbita objetos para los cuales el radicando sea mayor que 0. Habitualmente se suele definir una función **Φ(r)** que se denomina ***Potencial Efectivo***,

$$\Phi(r) = h^2\left(\frac{1}{2r^2}-\frac{\wp}{r}\right)$$

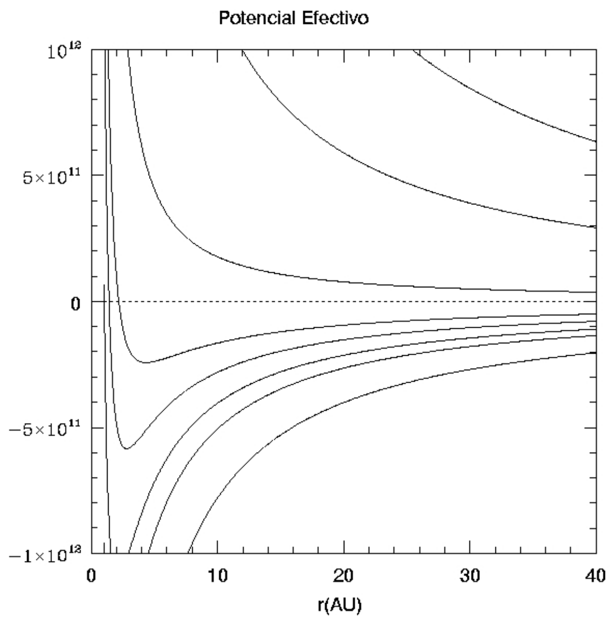
si sustituimos en ella las constantes por su valor,

$$\Phi(r) = \left(2.02\cdot10^{39}\,erg/g\right)\left(\frac{1}{2r^2}-\frac{\left(6.57\cdot10^{-14}-5.02\cdot10^{-14}\,\xi\right)}{r}\right)$$

donde, por comodidad, hemos introducido una nueva constate, ξ, para proporcionar la superficie total proyectada de la vela en función de una superficie que hemos tomado como referencia (ξ_0=9.0792·10^4m^2, equivalente a la superficie de un círculo de radio 170 m, como el usado en la aplicación), es decir,

$$\xi = \frac{S(m^2)\cos\varphi}{9.0792\cdot 10^4}$$

La forma del potencial efectivo depende del valor de ξ, es decir, de la efectividad en la utilización de la presión de radiación. Si el colector de radiación es muy grande el velero podría escapar de la gravedad del Sol y salir del Sistema Solar, por el contrario, si el colector es pequeño, el velero quedaría atrapado en una órbita muy similar a la del Puerto Espacial (y la Tierra). Este hecho se observa muy bien en la figura:



La ordenada de este figura nos indica el valor que debe adoptar la constante de energía **ε,** para que (ε-Φ) >0 y, por lo tanto, podamos mantener una nave en esa posición. La curva más negativa corresponde a ξ=0.1 y la más positiva a ξ=10. En el primer caso el velero no tendría prácticamente ninguna capacidad de maniobra y se quedaría atrapado en una órbita cercana a la del Puerto Espacial. Por el contrario, si ξ=10, el velero saldría rápidamente impulsado hacia el exterior del Sistema Solar con energía suficiente como para abandonarlo.

En la práctica el valor de **ε** para la órbita de la Tierra es muy pequeño, $-4.48\cdot 10^{12}\, erg/g$, y el velero que habría que construir tendría una superficie "difícilmente realizable". En la aplicación no nos hemos agarrado a la realidad para permitir que los alumnos jueguen con la composición de los dos vectores velocidad y, de esta manera, afiancen los conceptos físicos más fundamentales. El ángulo que hace el radiovector Sol-Velero con el vector velocidad viene fijado por el cociente entre las dos componentes:

$$\tan\phi = \frac{V_r}{V_\theta}$$

y, tal y como se indica en la figura, valores grandes de ζ sacan al velero de su "órbita nominal" y lo pueden enviar hacia el exterior del Sistema Solar. De manera que el módulo de la componente radial de la velocidad que utilizan en la aplicación viene dado simplemente por la expresión:

$$V_r\,(km/s) = 37.49 - 2.48\cdot 10^{-4}\, S(m^2)\cos\varphi$$

y al ajustar gráficamente el V_r para conseguir el rumbo deseado para el velero lo que hacen es determinar el valor de V_r necesario, y de ahí, la aplicación deriva que valor de superficie proyectada necesitan utilizando esta fórmula, para que luego los alumnos determinen el factor de proyección.

Apéndice

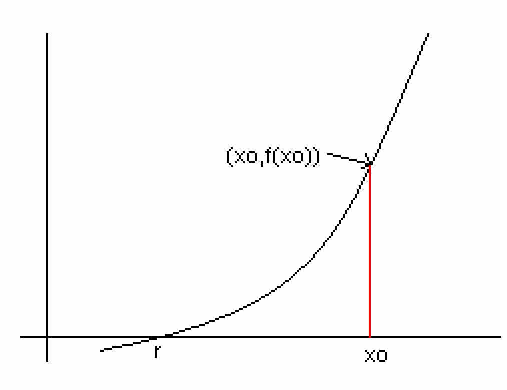
1

El método de Newton

El **método de Newton** es un procedimiento iterativo para calcular valores aproximados de una **raíz** o un **cero** de la ecuación $f(x) = 0$, partiendo de un **punto conocido** y **cercano** a la raíz buscada.

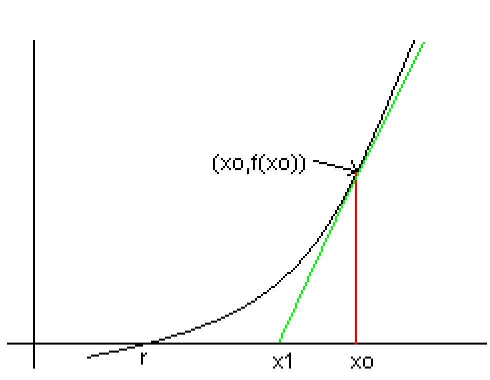
El método de Newton tiene una interpretación geométrica sencilla. De hecho, el método de Newton consiste en una **linealización** de la función, es decir, f se reemplaza por una recta tal que contiene al punto $(x_0, f(x_0))$ y cuya pendiente coincide con la derivada de la función en el punto, $f'(x_0)$.

Supongamos conocido x_o, sea r una raíz de $f(x) = 0$ situada en el intervalo $(x_o, f(x_o))$ y supóngase que $f'(x)$ existe en $(x_o, f(x_o))$.



La recta tangente a la curva en el punto $(x_o, f(x_o))$ de abscisa x_o (valor que se toma como la aproximación inicial de r) viene dada por:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$



Hallamos la intersección del eje X de

ordenadas con la recta *y=0.*

$$\begin{cases} y - f(x_0) = f^{'}(x_0)(x - x_0) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 0 - f(x_0) = f^{'}(x_0)(x - x_0)$$

La nueva aproximación a la raíz, x_1, es dicho punto de intersección. Si despejamos x de la última ecuación obtenemos:

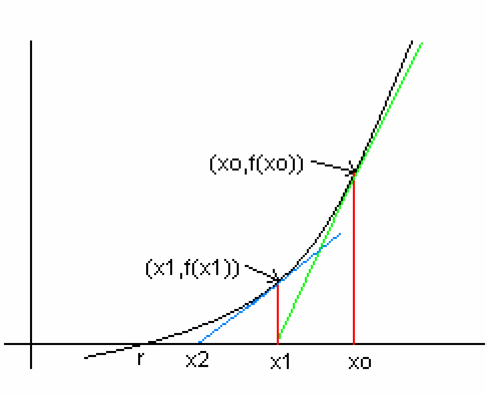
$$-\frac{f(x_0)}{f^{'}(x_0)} = x - x_0 \Rightarrow x_1 \equiv x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f^{'}(x_0)}$$

Si reemplazamos x_1 por x_0 es decir iteramos otra vez tendremos:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f^{'}(x_1)}$$

Así que una forma general del método de Newton es:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)}} \quad (*)$$



Aplicación a la resolución de la ecuación de Kepler:

Encontrar la solución a la ecuación de Kepler es un problema análogo a encontrar los ceros de la función f(E):

$$f(E) = M - E + e \cdot senE$$

Aplicando el método iterativo (*):

$$\begin{aligned} &x_n = E_n \\ &f(E_n) = M - E_n + e \cdot sen(E_n) \\ &f'(E_n) = -1 + \cos(E_n) \end{aligned}$$

de donde

$$E_{n+1} = E_n - \frac{f(E_n)}{f^{'}(E_n)};$$

$$E_{n+1} = E_n - \frac{M - E_n + e \cdot senE_n}{-1 + \cos E_n}$$

y,

$$\boxed{E_{n+1} = E_n + \frac{M - E_n + e \cdot senE_n}{1 - \cos E_n}}$$

tomando en la primera iteración $E_0 = M$[2]

[2] Nota: Los valores angulares tienen que estar en radianes